Title	4次曲面上の有理二重点について (特異点をめぐる位相的解析的様相)
Author(s)	卜部, 東介; 梅津, 裕美子
Citation	数理解析研究所講究録 (1982), 450: 30-48
Issue Date	1982-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/102951
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
450巻 1982年 30-48

4次曲面上の有理二重点について

都立大 理　　卜部 東介
梅津裕美子

§0.　Xを3次元複素射影空間$\mathbb{P}^3$内の4次超曲面で正規(今の場合，高々孤立特異点しかもたないことと同値)とする。Xの特異性を調べるための一段階として、次の問題を考える。

<u>問題</u>. 正規4次曲面上に存在するA_n, D_n型特異点について、nの最大値を求む。

結果は次の通りである：

A_n型特異点については　nの最大値は19,
D_n型特異点については　nの最大値は18 である。

これを証明するために，§1では問題をK3曲面の問題に帰着させる。そして§2，§3で準備をした後、§4から証明にはいる。

今回の研究集会で、成木勇夫氏と加藤満生氏も共同研究としてこの問題を取り挙げられ，4変数の4次斉次多項式を変数変換していくことによって A_n $(1 \leq n \leq 19)$ 型特異点の存在とその定義方程式の標準型を求める方法を示された。その後，D_n $(1 \leq n \leq 18)$ 型特異点についての同様の結果と，これらの特異点をもつ4次曲面の moduli 空間の既約成分の有理性を証明されたということである。(詳しくはこの講究録中の両氏による稿を御覧いただきたい。)

以下に述べる我々の方法はこれとは全く異なり，Nikulin による lattice の理論と，Kulikov，Todorov 等によって証明されたK3曲面の周期写像の全射性を用いるものである。まだ"存在"の部分しか言えていないが、4次曲面を"4次の斉次多項式"とは違った視点から捉えるこの方法は、また別の方向に発展する可能性があると思われる。

§1. Xを正規4次曲面とする。$\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ を minimal resolution, $g = \dim H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ とおくと次のことがわかっている（cf. Umezu [5]）。

<u>命題1.</u> (i) Xが高々有理二重点しかもたない$\Leftrightarrow$ $\tilde{X}$：K3曲面.
(ii) Xが有理二重点でない特異点をもつ$\Leftrightarrow$ $\tilde{X}$：線織曲面に双有理同値。

<u>命題2.</u> (ii)の場合，X上の有理二重点以外の特異点の集合は次のいずれかである。

(a) $\{P\}$：4重点；この場合，Xは非特異4次曲線上の cone である。$g = 3$.

(b) $\{P\}$：3重点で minimally elliptic；この場合，$g = 0$。

(c) $\{P\}$；2重点で $p_g(P) = 2$；$g = 1$.

(d) $\{P, Q\}$；共に2重点で simple elliptic；$g = 1$。

(e) $\{P\}$：2重点，minimally elliptic；$g = 0$。

X上にA_n（またはD_n）型特異点が存在したとすると，$\tilde{X}$のPicard数 $\rho(\tilde{X})$は $n+1$ 以上である。$\tilde{X}$の relatively minimal model を$\bar{X}$とし，$\tilde{X}, \bar{X}$の canonical divisor をそれぞれ$\tilde{K}$, $\bar{K}$とする。$\tilde{X}$が線織曲面に双有理同値とすると，命題2にお

いて、(a)の場合: $\tilde{X}=\overline{X}$ $\therefore$ $\rho(\tilde{X})=2$.

(b)の場合: minimally elliptic singularityの理論(Laufer [1])より $\tilde{K}^2=-3$, よって $\rho(\tilde{X})=\rho(\overline{X})+\overline{K}^2-\tilde{K}^2=13$。

(c)の場合: Yau [6], [7] より $\tilde{K}^2 \geqq -4$, よって $\rho(\overline{X})=2$, $\overline{K}^2=0$ より $\rho(\tilde{X})=2-\tilde{K}^2 \leq 6$。

(d)の場合: (b)と同様に $\tilde{K}^2 \geqq -4$ $\therefore$ $\rho(\tilde{X}) \leq 6$.

(e)の場合: $\tilde{K}^2 \geq -2$ $\therefore$ $\rho(\tilde{X}) \leq 12$.

また $\tilde{X}$ が K3 曲面ならば $\rho(\tilde{X}) \leq 20$ であるから, 結局次を示せばよいことになる。

「正規4次曲面で、A_{19} 型, D_{18} 型特異点をもつものが存在する。

D_{19} 型特異点をもつものは存在しない。」

上に述べたことより, $\tilde{X}$ は K3 曲面としてよい。A を π の例外曲線全体の和, $\mathcal{H}=\pi^*\mathcal{O}_X(1)$ とすると,

$$
(*)\begin{cases}
\mathcal{H}^2=4, \\
A \text{ の任意の component } \Gamma \text{ に対して } \mathcal{H}.\Gamma=0, \\
\tilde{X} \text{ 上の曲線 } C \text{ が } A \text{ に含まれなければ } \mathcal{H}.C>0, \\
Bs|\mathcal{H}|=\phi,\ \mathcal{H} \text{ で定義される morphism } \Phi_{\mathcal{H}} \text{ は birational}
\end{cases}
$$

が成立している。逆に(*)をみたす K3 曲面 $\tilde{X}$ 上の invertible sheaf $\mathcal{H}$ と曲線の和 A が与えられれば, K3 曲面の一般論 (cf. Saint-Donat [4]) より $\Phi_{\mathcal{H}}(\tilde{X})=X$ は正規4次曲面で、

$\Phi_{\mathcal{H}}(A)$ が X の特異点集合となる。よって問題は K3 曲面とその上の divisors の問題に帰着されたわけである。

§2. K3 曲面上の degree 4 の invertible sheaves.

X を K3 曲面, $\mathcal{H}$ を X 上の invertible sheaf で $\mathcal{H}^2=4$ とする。更に $\mathcal{H}$ は pseudo-ample (i.e. 任意の effective divisor D に対して $\mathcal{H}.D \geqq 0$) と仮定する。

命題1. $\mathrm{Bs}|\mathcal{H}| \neq \phi$ とすると $|\mathcal{H}| = |3E+\Gamma|$, E は非特異楕円曲線, Γ は非特異有理曲線, $E.\Gamma=1$ で, Γ が $|\mathcal{H}|$ の fixed part である。

命題2. $\mathrm{Bs}|\mathcal{H}| = \phi$ とすると次のいずれかが成立する。

(i) $\Phi_{\mathcal{H}}$ は birational morphism で image は $\mathbb{P}^3$ 内の正規4次曲面, 高々有理二重点しかもたない。

(ii) $\Phi_{\mathcal{H}}$ は general には 2 : 1 で、image は $\mathbb{P}^3$ 内の非特異二次曲面 ($\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) または非特異二次曲線上の cone $\subset \mathbb{P}^3$.

証明 命題1, 2とも, Saint-Donat [4] 参照.

<u>命題3.</u> $\Phi_{\mathcal{H}}$ が birational morphism でない $\Longleftrightarrow$ $\exists\mathcal{L}$: X上の invertible sheaf s.t. $\mathcal{L}^2=0$, $\mathcal{L}.\mathcal{H}=2$.

<u>証明.</u> $\Rightarrow$) $Bs|\mathcal{H}|\neq\phi$ なら $\mathcal{L}=\mathcal{O}_X(2E)$, Eは命題1の通り. とおけばよい。命題2の(ii)の場合には, E を $\Phi_{\mathcal{H}}(X)$ の general な fibre ($\Phi_{\mathcal{H}}(X)\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ のとき) または general な母線($\Phi_{\mathcal{H}}(X)$ が cone のとき) の proper transformation として $\mathcal{L}=\mathcal{O}_X(E)$ とおけばよい。

$\Leftarrow$) $\Phi_{\mathcal{H}}$ を birational とし, かつ $\mathcal{L}^2=0$, $\mathcal{L}.\mathcal{H}=2$ なる invertible sheaf $\mathcal{L}$ が存在したとする。Riemann-Roch の定理より $|\mathcal{L}|$の ある元の component として genus が1以上の 曲線 C が存在する。ところが$\mathcal{H}$は pseudo-ample だから $\mathcal{H}.C\leq 2$, 従って $\Phi_{\mathcal{H}}(C)$ は $\mathbb{P}^3$ 内の degree ≤ 2 の曲線となるから有理曲線であり矛盾である。

§3. <u>Nikulin の結果から.</u>

この§では, Nikulin [3] より我々に必要な部分を引用して述べる。

1°. S が lattice とは、rank 有限の free $\mathbb{Z}$-module で、

non-degenerate integral symmetric bilinear form $(\ ,\ ): S \times S \longrightarrow \mathbb{Z}$ を備えたものをいう。全ての $s \in S$ に対して $(s,s) \in 2\mathbb{Z}$ のとき，S を even lattice という。$\{e_i\}$ を S の basis としたとき，S の discriminant を $\mathrm{discr}\, S = \det((e_i, e_j))$ により定義する。$\mathrm{discr}\, S = \pm 1$ のとき，S は unimodular であるという。lattices の同型類全体は $\oplus$ によって semi-group をなす。それを $Qu(\mathbb{Z})$ と書く。

2°. A を finite abelian group とする。写像 $b: A \times A \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は，symmetric bilinear のとき，A 上の finite symmetric bilinear form という。写像 $q: A \longrightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ は次の条件をみたすとき，finite quadratic form という。

1) $q(na) = n^2 q(a)$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall a \in A$.

2) $q(a+a') - q(a) - q(a') \equiv 2\, b(a, a') \pmod{2\mathbb{Z}}$ for $\forall a, a' \in A$. ただし b はある finite symmetric bilinear form（この b を q の bilinear form と呼ぶ）.

finite symmetric bilinear forms（resp. finite quadratic forms）の同型類全体には自然に $\oplus$ が定義され，semi-group の構造をもつ。それを $bil(\mathbb{Z})$（resp. $qu(\mathbb{Z})$）と表わすと，

$$bil(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{p:\ \text{prime}} bil(\mathbb{Z})_p, \qquad qu(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{p:\ \text{prime}} qu(\mathbb{Z})_p$$

と分解される。ただし $bil(\mathbb{Z})_p$ (resp. $qu(\mathbb{Z})_p$) は、finite abelian p-groups 上定義された finite symmetric bilinear forms (resp. finite quadratic forms) の同型類全体のなす semi-group である。 $b \in bil(\mathbb{Z})$, $q \in qu(\mathbb{Z})$ の p-成分を b_p, q_p と書く： $b = \oplus b_p$; $q = \oplus q_p$.

とくに S を lattice とし， $S^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S, \mathbb{Z})$, $A_S = S^*/S$ とすると A_S は 位数 $|A_S| = |\mathrm{discr}\, S|$ の abelian group である。 $A_S \times A_S$ 上の函数として S の discriminant-bilinear form $b_S \in bil(\mathbb{Z})$, A_S 上の函数として S の discriminant-quadratic form $q_S \in qu(\mathbb{Z})$ を次の様に定義する (ただし q_S は S が even のときのみ定義する).

$$\begin{aligned} b_S(\bar{s}, \bar{t}) &\equiv (s, t) \pmod{\mathbb{Z}} \\ q_S(\bar{s}) &\equiv (s, s) \pmod{2\mathbb{Z}} \end{aligned} \qquad \bar{s}, \bar{t} \in A_S.$$

ただし $s, t \in S^*$ は $\bar{s}, \bar{t}$ の代表元，右辺の (,) は S の (,) を S^* に自然に拡張したものである。

明らかに

$$b_{S_1} \oplus b_{S_2} = b_{S_1 \oplus S_2} \ , \quad q_{S_1} \oplus q_{S_2} = q_{S_1 \oplus S_2} \ .$$

3°. p を素数とする。 1° の lattice の定義において $\mathbb{Z}$ を p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ でおきかえることより，p-adic lattice とその同型類のなす semi-group $Qu(\mathbb{Z}_p)$ が定義される。また $\mathbb{Q}$ も $\mathbb{Q}_p$, finite abelian group を finite abelian p-group でおきかえて, $\mathrm{bil}(\mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{qu}(\mathbb{Z}_p)$ etc. も 2° と同様に定義する。

命題 1. (i) $\mathrm{bil}(\mathbb{Z})_p \cong \mathrm{bil}(\mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{qu}(\mathbb{Z})_p \cong \mathrm{qu}(\mathbb{Z}_p)$.
(以下、この同型により両辺を同一視する。)
(ii) S を lattice (over $\mathbb{Z}$) とすると,

$$(b_S)_p = b_{S\otimes\mathbb{Z}_p}, \quad b_S = \bigoplus_p b_{S\times\mathbb{Z}_p}.$$

更に S を even lattice とすると,

$$(q_S)_p = q_{S\times\mathbb{Z}_p}, \quad q_S = \bigoplus_p q_{S\times\mathbb{Z}_p}.$$

4°. p を素数とする。

$K_\theta^{(p)}(p^k)$: matrix (θp^k) で定まる p-adic lattice, $k \geqq 0$, $\theta \in \mathbb{Z}_p^* = \{\mathbb{Z}_p$ の可逆元全体$\}$.

$U^{(2)}(2^k)$: matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2^k \\ 2^k & 0 \end{pmatrix}$ で定まる 2-adic lattice, $k \geqq 0$.

$V^{(2)}(2^k)$: matrix $\begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2^k \\ 2^k & 2^{k+1} \end{pmatrix}$ で定まる 2-adic lattice, $k \geqq 0$.

とおき, $K_\theta^{(p)}(p^k)$, $U^{(2)}(2^k)$, $V^{(2)}(2^k)$ の discriminant-bilinear forms (resp. discriminant-quadratic forms) をそれぞれ $b_\theta^{(p)}(p^k)$, $u_-^{(2)}(2^k)$, $v_-^{(2)}(2^k)$ (resp. $q_\theta^{(p)}(p^k)$, $u_+^{(2)}(2^k)$, $v_+^{(2)}(2^k)$) とおくと,

命題 2. 上記のものがそれぞれ $\mathrm{Qu}(\mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{bil}(\mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{qu}(\mathbb{Z}_p)$

の free generators である。ただし θ は $\bmod (\mathbb{Z}_p^*)^2$ でとる。

定義. finite group A に対し，$\ell(A)$ で A の generators の最小個数を表わす。

命題3. A_{q_p} を finite quadratic form $q_p \in qu(\mathbb{Z}_p)$ の定義された p-group とする。このとき，$p=2$ かつ q_2 が $q_\theta^{(2)}(2)$ を直和成分にもつ（for some $\theta \in \mathbb{Z}_2^*$）場合を除いて、rank $\ell(A_{q_p})$ の p-adic lattice でその discriminant-quadratic form が q_p と同型になるものが同型を除いて唯一つ存在する。

定義. 上の p-adic lattice を $K(q_p)$ と書く。

5°. lattices の embedding $S \hookrightarrow S'$ は，S'/S が free $\mathbb{Z}$-module のとき primitive という。

定理. S を signature $(t_{(+)}, t_{(-)})$, discriminant-quadratic form q の even lattice とし，$A_q = S^*/S = \bigoplus_p A_{q_p}$, $q = \bigoplus_p q_p$ とおく。このとき，S から signature $(\ell_{(+)}, \ell_{(-)})$ のある

unimodular even lattice への primitive embedding が存在するための必要十分条件は，次の4条件が全てみたされることである。

(i) $l_{(+)} - l_{(-)} \equiv 0 \pmod{8}$.

(ii) $l_{(+)} - t_{(+)} \geqq 0$, $l_{(-)} - t_{(-)} \geqq 0$, $l_{(+)} + l_{(-)} - t_{(+)} - t_{(-)} \geqq l(A_q)$.

(iii) $(-1)^{l_{(+)} - t_{(+)}} |A_q| \equiv \mathrm{discr}\, K(q_p) \pmod{(\mathbb{Z}_p^*)^2}$

for $\forall p$: odd prime s.t. $l_{(+)} + l_{(-)} - t_{(+)} - t_{(-)} = l(A_{q_p})$.

(iv) $|A_q| \equiv \pm\, \mathrm{discr}\, K(q_2) \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}$

if $l_{(+)} + l_{(-)} - t_{(+)} - t_{(-)} = l(A_{q_2})$ かつ $q_2 \neq q_\theta^{(2)}(2) \oplus q_2'$.

注意. $m, n \in \mathbb{Z}_p$, p : prime とすると,

p : odd のとき, $m \equiv n \pmod{(\mathbb{Z}_p^*)^2} \Longleftrightarrow m = p^\alpha u$, $n = p^\beta v$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $u, v \in \mathbb{Z}_p^*$) としたとき $\alpha = \beta$ かつ $u \equiv v \cdot w^2 \pmod{p \cdot \mathbb{Z}_p}$ for some w, $1 \leq w \leq p-1$.

$p=2$ のとき, $m \equiv \pm n \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2} \Longleftrightarrow m = p^\alpha u$, $n = p^\beta v$ (同様の分解) としたとき $\alpha = \beta$ かつ $u \equiv \pm v \pmod{8\mathbb{Z}_2}$.

例. $S = \mathbb{Z} l \oplus A_{19}$, $(l, l) = 4$, $L = E_8 \oplus E_8 \oplus \overset{3}{\oplus} U$ とする。ただし A_{19}, E_8, U はそれぞれ A_{19}, E_8 型特異点の minimal resolutions の交点行列及び $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ によってきまる lattice である。L は signature $(3, 19)$ の唯一の unimodular even lattice である。S は L に primitive には埋め込めない。実際，

S の canonical な basis $\ell, e_1, \cdots, e_{19}$ をとり, $\ell^*, e_1^*, \cdots, e_{19}^*$ をその dual basis $\in S^*$ とすると,

$$A_{q_S} = S^*/S = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$$

ただし、$a \equiv \ell^* = \frac{\ell}{4} \pmod S$

$$b \equiv e_1^* = -\frac{1}{20}(19e_1 + 18e_2 + \cdots + e_{19}) \pmod S$$

$$q_S(a) \equiv \frac{1}{4}, \quad q_S(b) \equiv -\frac{19}{20} \pmod{2\mathbb{Z}}$$

となる。$ord(a) = 4$, $ord(b) = 20$ だから, 定理の条件 iv) を調べればよい。ところが

$$(q_S)_2 = q_1^{(2)}(2^2) \oplus q_1^{(2)}(2^2)$$

となるので

$$\operatorname{discr} K((q_S)_2) = \operatorname{discr}(K_1^{(2)}(2^2) \oplus K_1^{(2)}(2^2)) = 2^4.$$

一方 $|A_{q_S}| = 4 \times 20 \not\equiv \pm 2^4 \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}$ だから iv) は不成立。

6°. lattices の embedding $S \hookrightarrow S'$ で S'/S が finite となるとき, S' を S の overlattice という。

我々は与えられた lattices S, L について, 必ずしも primitive でない embedding $S \hookrightarrow L$ の存在の判定法を知る必要がある. しかし embedding $S \hookrightarrow L$ が存在すれば、S の overlattice S' が存在して $S' \hookrightarrow L$ が primitive となっている。以下に even lattice S が与えられたとき, その even overlattices を全て求める方法を記す。

S' を S の 1 つの even overlattice とし、$H_{S'} = S'/S$ とおくと free $\mathbb{Z}$-modules の injections $S \hookrightarrow S' \hookrightarrow S'^{*} \hookrightarrow S^{*}$ より finite groups の injections $H_{S'} = S'/S \hookrightarrow S'^{*}/S \hookrightarrow A_S = S^{*}/S$ が得られる。S' が even であることより $q_S|_{H_{S'}} = 0$, また
$S'^{*}/S = H_{S'}^{\perp} \underset{\text{def.}}{=\!=} \{x \in A_S \mid b_S(x, y) = 0 \text{ for } \forall y \in H_{S'}\}$,
$A_{S'} = H_{S'}^{\perp}/H_{S'}$, $q_{S'} = q_S|_{H_{S'}^{\perp}/H_{S'}}$ となっている。

定義. $A_S \supset H$: subgroup で $q_S|_H = 0$ となるものを A_S の isotropy subgroup と呼ぶ。

命題4. 上の対応 $S' \mapsto H_{S'}$ は S の even overlattices と A_S の isotropy subgroups 間の bijection を与える。

例. S を 5° の例の even lattice とし、この even overlattices を全て求めよう。5° の記号を用いると、$m, n \in \mathbb{Z}$, $0 \le m \le 3$, $0 \le n \le 19$ に対して、

$$q_S(ma + nb) = 0 \iff \frac{m^2}{4} - \frac{19n^2}{20} \in 2\mathbb{Z}$$

$$\iff m^2 + \left(\frac{n}{5}\right)^2 \in 8\mathbb{Z}$$

$$\iff (m, n) = (0, 0) \text{ または } (2, 10).$$

故に $H = \langle 2a + 10b \rangle$ が A_S の唯一の自明でない isotropy subgroup である。よって対応する S の overlattice を S' とする

と，S' が S の唯一の自明でない even overlattice である。

以下，S' が L に primitive に embed されることを示す。

$a, b \in A_S$ の A_S/H における images を $\bar{a}, \bar{b}$ とすると，

$$A_{S'} = S'^*/S' = H^\perp/H = \underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\langle \bar{a}+5\bar{b} \rangle}} \times \underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\langle \bar{a}+15\bar{b} \rangle}} \times \underset{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\langle 4\bar{b} \rangle}}$$

$$(q_{S'})_2 = q_1^{(2)} \oplus q_1^{(2)}(2)$$

$$\text{signature of } S' = \text{signature of } S = (1, 19)$$

となるので，5°の定理より，primitive embedding $S' \hookrightarrow L$ が存在する。

§4．4次曲面上の A_{19} 型特異点の存在

§2，3 の結果と周期写像の理論を用いて，正規4次曲面で A_{19} 型特異点をもつものが存在することを証明する。K3 曲面の周期写像については浪川先生が講演されたのでここでは詳しく述べないが，[2] を参考文献として挙げておく。

1°. $S = \mathbb{Z}\ell \oplus A_{19}$，$(\ell, \ell) = 4$，$L = E_8 \oplus E_8 \oplus \overset{3}{\oplus} U$ とおくと，§3 の例で計算したように overlattice $S \hookrightarrow S'$ と primitive embedding $S' \hookrightarrow L$ が存在する。以下，この embedding を固定する。

2°. ℓをLの元とみて

$$\mathcal{D}(\ell)=\left\{[\omega]\in\mathbb{P}(L\otimes\mathbb{C})\;\middle|\;(\omega,\omega)=0,\ (\omega,\bar{\omega})>0,\ (\omega,\ell)=0\right\}$$

とおくと，$\mathcal{D}(\ell)$の元$[\omega]$で$\omega\in S_{\mathbb{C}}^{\perp}\underset{\text{def.}}{=}\{\omega\in L\otimes\mathbb{C}\mid(\omega,s)=0$ for $\forall s\in S\}$となるものが存在する。

証明. signature$(L)=(3,19)$，signature$(S)=(1,19)$であるから$S_{\mathbb{C}}^{\perp}$の$\mathbb{C}$上のbasis x_1, x_2として$(x_i,x_i)=1$，$\overline{x_i}=x_i$ $(i=1,2)$，$(x_1,x_2)=0$となるものがとれる。そこで例えば$\omega=x_1+\sqrt{-1}\,x_2$とおけば$\omega$は求める性質をもつ。

3°. 上のような$[\omega]$を1つとる。K3曲面の周期写像の全射性より，X：K3曲面，$\psi: H^2(X,\mathbb{Z})\xrightarrow{\sim}L$：lattices としての同型であって，marked K3曲面(X,ψ)の周期$[\omega_{(X,\psi)}]$が$[\omega]$に一致するものが存在する。$\omega\in S_{\mathbb{C}}^{\perp}$より，$\mathrm{Pic}(X)$の元$\mathcal{H}, \mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_{19}$が存在して

$$\psi(c(\mathcal{H}))=\ell,$$

$$\psi(c(\mathcal{L}_1)),\cdots,\psi(c(\mathcal{L}_{19}))\ \text{が}\ A_{19}\ (\subset S\subset L)\ \text{の canonical basis}$$

となる。更に$\mathcal{H}$はpseudo-ampleとしてよい。実際，X上の非特異有理曲線による鏡映の合成$g: H^2(X,\mathbb{Z})\xrightarrow{\sim}H^2(X,\mathbb{Z})$が存在して$g(c(\mathcal{H}))=g(c(\mathcal{H}'))$，$\mathcal{H}'$はある$X$上のpseudo-ample invertible sheafとなる([2])。gは$\mathrm{Pic}(X)$上の同型を引き起こすから，$g(\mathcal{L}_i)=\mathcal{L}_i$として，$\psi,\omega$を適当に変換するこ

とによって，$\mathcal{H}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{19}$ を $\mathcal{H}', \mathcal{L}_1', \dots, \mathcal{L}_{19}'$ に置き換えられる．

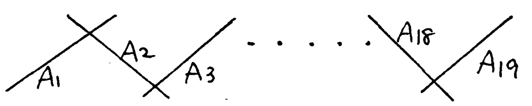
4°. $\Phi_{\mathcal{H}}$ は birational morphism.

証明. §3 の計算から $S' = S + \mathbb{Z}\cdot(2\ell^* - \frac{1}{2}(19e_1^* + 18e_2^* + \cdots + e_{19}^*))$. これから S'の元 t で $(t,t)=0$, $(t,\ell)=2$ となるものは存在しないことがわかる。また $\mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Z})$ は primitive で，しかも S の even overlattice で L に primitive に embed されるものは S' のみだから $\psi(\mathrm{Pic}(X)) = S'$. 故に $\mathrm{Pic}(X)$ の元 $\mathcal{L}$ で $\mathcal{L}^2=0$, $\mathcal{L}.\mathcal{H}=2$ となるものは存在しない。よって §2，命題3 より，$\Phi_{\mathcal{H}}$ は birational morphism である。

5°. $1 \le {}^\forall i \le 19$ について，X 上の divisor D_i を $\mathcal{O}_X(D_i) = \mathcal{L}_i$ となるようにとると，D_iの任意の component Γ は 非特異有理曲線で $\mathcal{H}.\Gamma \doteq 0$ をみたす。

証明. $D_i^2=-2$ だから Riemann-Roch の定理より $D_i \geqq 0$ または $-D_i \geqq 0$. 一方 $\mathcal{H}.D_i=0$ かつ $\mathcal{H}$: pseudo-ample である。よって $\mathcal{H}.\Gamma=0$. また Hodge の指数定理より $\Gamma^2<0$ i.e. $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$.

6°. $A = \bigcup_{i=1}^{19} \mathrm{Supp}(D_i)$ とおくと $A = \sum_{i=1}^{19} A_i$, $A_i \cong \mathbb{P}^1$ で次の configuration をもつ：



証明. $\mathcal{H}.A=0$ より A は contractible である。次にもしある i について D_i が connected でないとすると, $D_i=D_{i1}+D_{i2}$, $D_{ij}\neq 0$ $(j=1,2)$, $D_{i1}.D_{i2}=0$ と分解されるが,

$$-2=D_i^2=D_{i1}^2+D_{i2}^2,\quad D_{ij}^2 : \text{even かつ negative } (j=1,2)$$

となって矛盾。よって各 D_i は connected である。また $D_i.D_{i+1}=1$ $(i=1,\cdots,18)$ だから A 自身 connected である。

A の components の生成する $\mathrm{Pic}(X)$ の submodule の rank $\geqq 19$ とあわせると, 上の形しかあり得ない。

以上より $\Phi_{\mathcal{H}}(X)\subset\mathbb{P}^3$: 正規4次曲面で A は一点 P に contract され, P は A_{19} 型特異点である。

§5. 4次曲面上の D_{19} 型特異点の非存在, D_{18} 型特異点の存在

証明の概略を述べる。

まず, $S=\mathbb{Z}l\oplus D_{19}$, $(l,l)=4$ とおくと §3 の方法によって次のことがわかる。

i) S から L への primitive embedding は存在しない。

ii) S の自明でない even overlattice は唯一つ。それを S' とする。

iii) S' から L への primitive embedding が存在する。

また具体的な計算により,

iv) S'の元sで$(s,s)=0$, $(s,\ell)=2$ となるものが存在する。

XをK3曲面で, embedding $S \overset{i}{\hookrightarrow} \mathrm{Pic}(X)$ が存在して $i(\ell)=\mathcal{H}$ が pseudo-ample とすると, i)〜iii)より $\mathrm{Pic}(X)\cong S'$. よって iv)より $\exists\mathcal{L}\in\mathrm{Pic}(X)$ s.t. $\mathcal{L}^2=0$, $\mathcal{L}.\mathcal{H}=2$ となり §2の命題3より $\Phi_{\mathcal{H}}$ は birational morphism ではない。(実は$\Phi_{\mathcal{H}}(X)$は$\mathbb{P}^3$内の2次の cone である。) 故に正規4次曲面上にD_{19}型特異点は存在しない。

次に $S=\mathbb{Z}\cdot\ell\oplus D_{18}$, $(\ell,\ell)=4$ とおくと, §3の定理より, primitive embedding $S\hookrightarrow L$ が存在することがわかる。これを固定して考える。

まず, $\mathcal{D}(\ell)$の元$[\omega]$で,

$$\forall t\in L \text{ に対して } (t,\omega)=0 \iff t\in S$$

となるものが存在することを示す。実際, $S^{\perp}=\{t\in L\mid (t,s)=0 \text{ for } \forall s\in S\}$ とおき, $S^{\perp}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の orthogonal basis x_1, x_2, x_3 を $(x_1,x_1)>0$, $(x_2,x_2)>0$, $(x_3,x_3)<0$ となるようにとる。このとき, α を $\alpha>\sqrt{\frac{-(x_3,x_3)}{(x_2,x_2)}}$ なる無理数として $\omega=\sqrt{\frac{-\alpha^2(x_2,x_2)-(x_3,x_3)}{(x_1,x_1)}}\,x_1+\alpha x_2+x_3$ とおけば ω は条件をみたす。

この$[\omega]$に対応する marked K3曲面を(X,ψ)とすると, $[\omega]$のとり方から $\psi(\mathrm{Pic}(X))=S$ となる。よって ℓ に pseudo-ample invertible sheaf $\mathcal{H}$ が対応するようにしておけば, §4と同様にして, $\Phi_{\mathcal{H}}(X)$は正規4次曲面でD_{18}型特異点をもつことがわかる。

§ おわりに

本稿では A_{19}, D_{19}, D_{18} についてのみ述べたが、有理二重点の型と個数を指定すれば、同じ方法によって、その特異性をもつ正規4次曲面が存在するかどうかは判定できる。しかし、そのような特異性の現われ方全体を説明する理論はまだできていない。

参考文献

[1] H. Laufer, *On minimally elliptic singularities*, Amer. J. Math. 99 (1977), 1257-1295.

[2] 浪川幸彦, K3曲面の周期の逆問題とKähler性, 代数幾何学城崎シンポジューム記録 (1980), 108-129.

[3] V.V. Nikulin, *Integral symmetric bilinear forms and some of their applications*, Math. USSR Izv. 14 (1980), 103-167.

[4] B. Saint-Donat, *Projective models of K-3 surfaces*, Amer. J. Math. 96 (1974), 602-639.

[5] Y. Umezu, *On normal projective surfaces with trivial dualizing sheaf*, to appear in Tokyo J. Math.

[6] Stephen S.-T. Yau, *Gorenstein singularities with geometric genus equal to two*, Amer. J. Math. 101 (1979), 813-854.

[7] ———, *On maximally elliptic singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. 257 (1980), 269-329.